

Première S

DM3 : problèmes ouverts

Exercice 1 :

La question sur l'aire du cube a comme réponse $6n^2$, où n est le côté (entier) du cube. Les premières réponses possibles sont donc : 6 ; 24 ; 54 ; etc. La seule de ces réponses qui figure dans le tableau est 24, et comme au moins un élève a eu 20 c'est la bonne. La question sur l'aire du cube est donc la question 2.

La question sur le prix de la chemise a pour réponse : $20 \times (1 - 0,20) = 20 \times 0,8 = 16$. Encore une fois un élève a eu 20 donc la bonne réponse figure dans le tableau : c'est la question 1 ou 3. Cela signifie notamment que Alex, par exemple, qui a répondu 16 à ces deux questions, a au moins une bonne réponse.

Cherchons maintenant quel élève a eu 0 : avec ce qu'on sait déjà, on est certain que c'est Lucille ou Saïda (tous les autres ont forcément juste à l'une des trois premières questions). Dans les deux cas, ceci nous assure que la réponse à la question 4 n'est pas 10 !

Cherchons donc plutôt qui a eu 20 : les seuls qui ont répondu 24 à la question 2 et 16 à une autre question sont Yves et Jérôme. Mais comme Yves a répondu 10 à la question 4, *c'est Jérôme qui a eu 20*.

On connaît maintenant toutes **les bonnes réponses** (celles de Jérôme : **12 – 24 – 16 – 18**), et on peut donc noter les élèves

Alex	Carina	Jérôme	Lucille	Myriam	Nicole	Saïda	Yves
5	10	20	0	5	10	5	5

On vérifie au passage que la note 0 a bien été attribuée (à Lucille).

Exercice 2 : Des ciseaux et du papier

Remarque préliminaire : plier une feuille en deux revient à construire le symétrique d'un côté par rapport à la ligne de pliure. On rappelle que l'axe de symétrie entre deux points est la **médiatrice** du segment dont ces deux points sont les extrémités.

1- La figure ci-contre est réduite de moitié.

On a replié le coin A le long de la diagonale (BD). Il arrive en A'.

Les parties qui se recouvrent sont données par le triangle DFB : FCB fait partie du rectangle initial n'est pas recouvert, et DFA' est la partie repliée qui dépasse.

Une fois la feuille découpée et redépliée, on trouve le losange DFBF', où F' est le symétrique de F par rapport à (BD).

2- La longueur c recherchée est DF ou bien BF.

Sur le segment [CD], on voit que $FC = L - c$.

Dans le triangle BCF rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore :

$$BF^2 = CF^2 + BC^2$$

$$c^2 = (L - c)^2 + l^2$$

$$c^2 = (16 - c)^2 + 8^2$$

$$c^2 = 256 - 32c + c^2 + 64$$

$$32c = 320$$

Lorsque $L = 16$ et $l = 8$ on a $c = 10$.

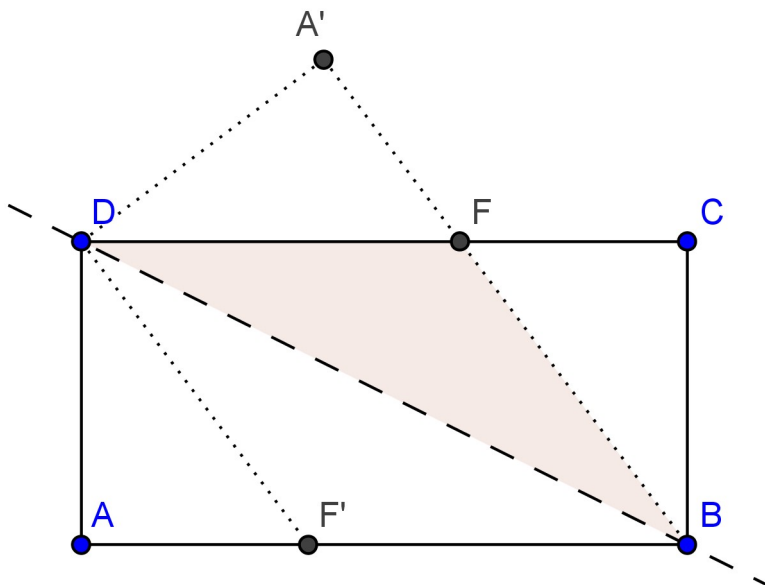
3- On peut reprendre l'équation établie à la question précédente dans le triangle BCF :

$$c^2 = (L - c)^2 + l^2$$

$$7,5^2 = (L - 7,5)^2 + l^2$$

$$56,25 = L^2 - 15L + 56,25 + l^2$$

$$l^2 = 15L - L^2$$



$$l = \sqrt{15L - L^2}$$

A priori on peut choisir n'importe quelle valeur de L et calculer le l correspondant avec cette formule ; il faut cependant s'assurer de deux choses :

Pour que la racine carrée soit définie : $15L - L^2 \geq 0$, donc en divisant par L (positif non nul) $15 \geq L$.

De plus il faut que $L \geq 1$ (sinon le rectangle n'est plus « dans le bon sens », la figure est faussée et les calculs effectués aussi).

Comme on est intéressés ici uniquement par des dimensions entières du rectangle, on essaye toutes les valeurs entières de L inférieures à 15 et on voit si la valeur calculée pour l est entière :

L	15	14	13	12	11	10	9	8	7
l	0	$\sqrt{14}$	$\sqrt{26}$	6	$2\sqrt{11}$	$5\sqrt{2}$	$3\sqrt{6}$	$2\sqrt{14}$	$2\sqrt{14}$

Pour $L \leq 7$, la largeur devient supérieure à la longueur.

Conclusion de la question 3 : les dimensions entières possibles du rectangle pour que le côté du losange soit 7,5 sont :

- $L = 12$ et $l = 6$;
- comme cas limite, $L = 15$ et $l = 0$, ce qui correspond à un rectangle (et un losange) complètement aplatis.

4- Par symétrie par rapport à l'axe (BD), pour que l'aire du losange soit 75% de celle du rectangle, il faut et il suffit que l'aire de BFD (demi-losange) soit 75% de celle de BCD (demi-rectangle).

Ces deux triangles ont pour hauteur commune BC, donc il faut et il suffit que la base DF représente 75% de la base DC :

$$c = \frac{3}{4} \times L$$

En substituant c par cette expression dans l'équation $c^2 = (L - c)^2 + l^2$, on trouve :

$$\left(\frac{3}{4} \times L\right)^2 = \left(L - \frac{3}{4}L\right)^2 + l^2$$

$$\frac{9}{16}L^2 = \frac{1}{16}L^2 + l^2$$

$$l^2 = \frac{1}{2}L^2$$

$$l = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

5- Par construction, comme on l'a remarqué au 1), le quadrilatère DFBF' est symétrique par rapport à (BD) puisqu'il se recouvre parfaitement si on le replie le long de cette diagonale. Ceci signifie notamment que :

- $DF = DF'$ et $BF = BF'$.
- [BD] coupe [FF'] en son milieu.

Par ailleurs, la figure initiale (le rectangle ABCD) est symétrique par rapport à son centre (l'intersection O des diagonales). Nécessairement, le reste de la construction est aussi symétrique par rapport à O : les points F et F' sont symétriques par rapport à O, autrement dit O est le milieu de [FF'].

O est le milieu commun de [BD] et [FF'], donc DFFB' est un parallélogramme.

De plus ce parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur ($DF = DF'$), donc **DFFB' est un losange**.

Exercice 3 :

1- On remarque déjà qu'aucune décomposition comprenant 1 ne peut montrer qu'un nombre est bon, car la somme des inverses est alors forcément supérieure à 1.

- **4 est bon** : $4 = 2 + 2$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
- **5 est mauvais** : la seule décomposition possible (sans 1) est $5 = 2 + 3$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq 1$.
- **6 est mauvais** : les seules décompositions sans 1 sont $6 = 3 + 3$ et $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \neq 1$, ou $6 = 2 + 4$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \neq 1$.
- **7 est mauvais** : $7 = 2 + 2 + 3$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq 1$, ou $7 = 2 + 5$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \neq 1$, ou $7 = 3 + 4$ et $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \neq 1$.
- **8 est mauvais** : $8 = 2 + 2 + 2 + 2$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \neq 1$, ou $8 = 2 + 2 + 4$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \neq 1$, ou $8 = 2 + 3 + 3$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \neq 1$, ou $8 = 3 + 5$ et $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \neq 1$.
- **9 est bon** : $9 = 3 + 3 + 3$ et $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$.
- **10 est bon** : $10 = 2 + 4 + 4$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

2- Le carré d'un entier n s'écrit sous la forme $n^2 = n \times n = n + n + \dots + n$ (n termes dans cette somme).

Cette décomposition montre que **n^2 est bon** car $\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{n \times 1}{n} = \frac{n}{n} = 1$.

3- Si n est bon alors il admet une décomposition $n = a + b + \dots + k$ avec $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{k} = 1$ (ici k est une lettre choisie arbitrairement, on ne sait évidemment pas combien il y aura de termes dans la décomposition).

Alors $2n + 2 = 2a + 2b + \dots + 2k + 2$ et $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} = 1$.

De même $2n + 9 = 2a + 2b + \dots + 2k + 3 + 6$ et

$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.

4- Soit un entier m supérieur ou égal à 56. Deux cas peuvent se produire :

- Si m est pair, alors on peut l'écrire sous la forme $m = 2n + 2$. Le nombre n vaut dans ce cas $\frac{m-2}{2}$.

Si on arrive à démontrer que n est bon, alors m l'est aussi. Puisque $m \geq 56$, on a $n = \frac{m-2}{2} \geq 27$.

Si n est compris entre 27 et 55, on sait qu'il est bon, et donc que m l'est aussi.

Si n est encore supérieur à 55, on recommence comme avec m , on cherche si n est pair ou impair, etc.

- Si m est impair, alors on peut l'écrire sous la forme $m = 2n + 9$. Le nombre n vaut dans ce cas $\frac{m-9}{2}$.

Si on arrive à démontrer que n est bon, alors m l'est aussi. Puisque $m \geq 56$ et impair, on a en fait $m \geq 57$, et donc $n = \frac{m-9}{2} \geq 24$.

Si n est compris entre 24 et 55, on sait qu'il est bon, et donc que m l'est aussi.

Si n est encore supérieur à 55, on recommence comme avec m , on cherche si n est pair ou impair, etc.

Dans tous les cas, on établit donc depuis m une chaîne de nombres de plus en plus petits, jusqu'à tomber entre 24 et 55. En remontant cette chaîne avec le résultat établi au 3, on démontre que m est bon.

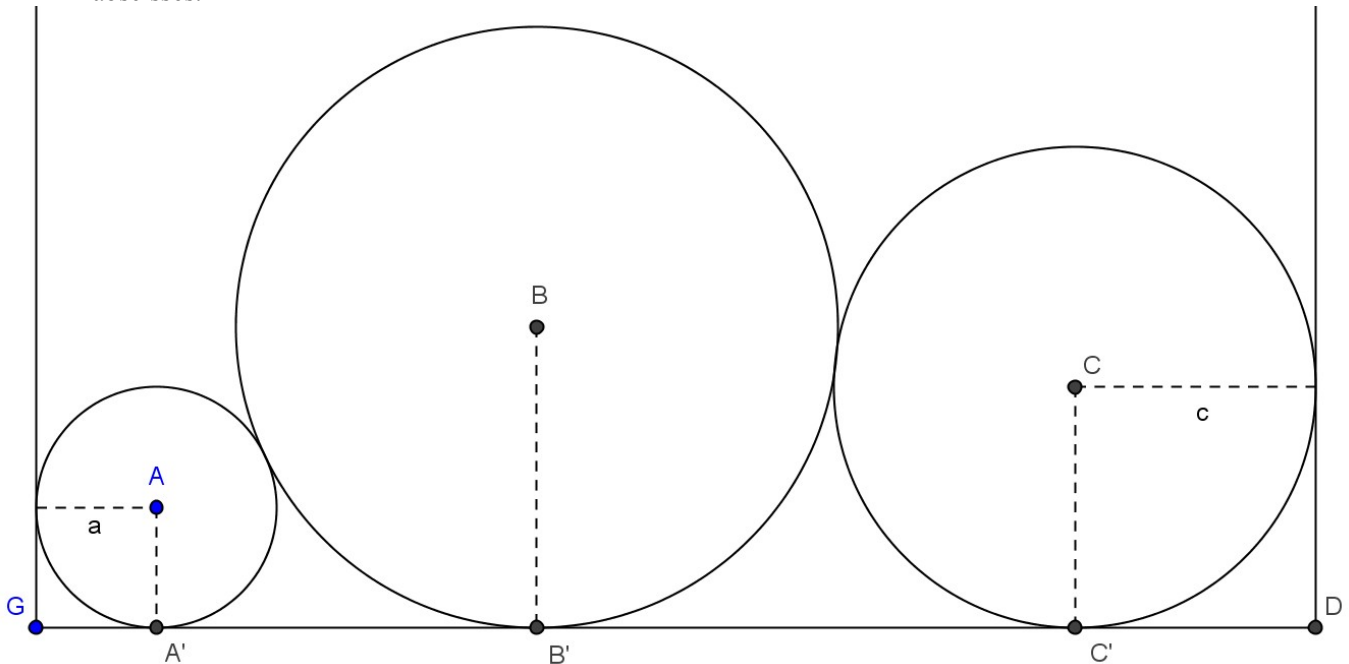
Remarque : il n'y a pas de façon astucieuse de montrer que tous les nombres entre 24 et 55 sont bons, à part ceux qui sont des carrés ou des nombres de la forme $2n + 2$ ou $2n + 9$ avec n bon.

Exercice 4 :

L'énoncé est conçu pour calculer deux valeurs de l dans un cas particulier avant d'établir une formule générale, mais ici on va répondre au 2-a) directement pour gagner du temps.

Remarques préliminaires :

- On va travailler dans le plan de coupe P perpendiculaire aux cylindres. On appelle A , B et C les centres respectifs des trois cercles apparents, et on appelle A' , B' et C' leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses.



- La distance GD est composée de quatre longueurs, mesurées le long de l'axe des abscisses :
 - GA' qui est égale au rayon a du premier cylindre ;
 - $A'B'$ et $B'C'$ que l'on va étudier plus en détails ci-dessous ;
 - $C'D$ qui est égale au rayon c du dernier cylindre.

Pour déterminer $l(a,b,c)$, il nous reste donc à trouver la différence d'abscisse entre les centres de deux cercles tangents. Déterminons par exemple $A'B'$; la longueur $B'C'$ aura une expression similaire.

Lorsque deux cercles sont tangents en un point E , ils admettent une tangente commune en E . On rappelle que la tangente à un cercle au point E est perpendiculaire au rayon du cercle issu du point E . On a donc la figure ci-contre, où A , E et B sont alignés. D est le point de $[BB']$ tel que (AD) soit perpendiculaire à (BB') .

On détermine aisément les longueurs suivantes :

- $AE = a$
- $EB = b$
- $AB = a + b$
- $BB' = b$
- $AA' = a$
- $DB' = AA' = a$
- $BD = BB' - DB' = b - a$

Dans le triangle ABD rectangle en D , d'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = BD^2 + AD^2$$

$$(a+b)^2 = (b-a)^2 + AD^2$$

$$AD^2 = (a+b)^2 - (b-a)^2$$

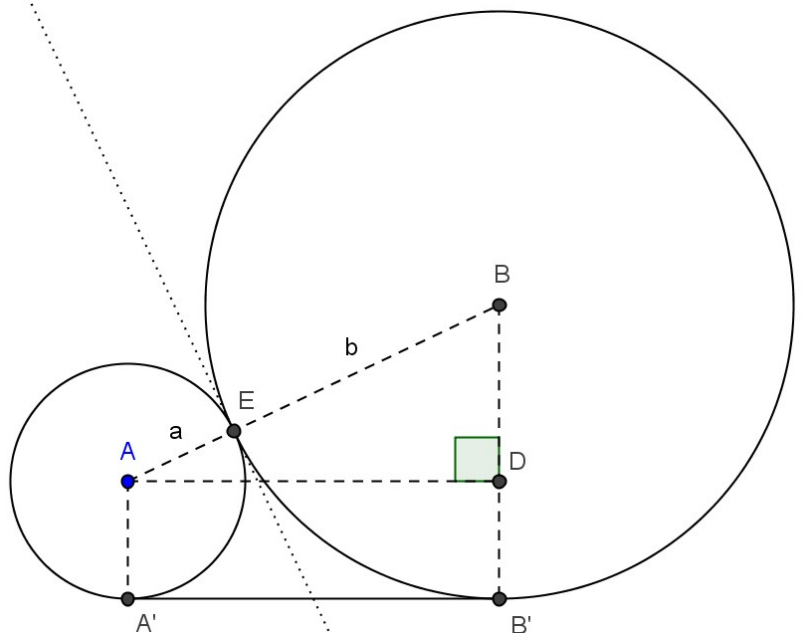
$$AD^2 = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 + 2ab - a^2$$

$$AD^2 = 4ab$$

$$AD = \sqrt{4ab}$$

$$AD = 2\sqrt{ab}$$

Or $A'B' = AD$ donc on a déterminé la différence d'abscisse entre A et B .



On remarque que cette formule est « symétrique en a et b », autrement dit les rôles de a et b sont interchangeables. Cela signifie qu'elle est valable aussi bien quand $a < b$ que quand $a > b$.

Pour finir, on peut donc exprimer $GD = GA' + A'B' + B'C' + C'D$ directement en fonction des rayons des trois cylindres :

$$l(a, b, c) = a + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + c$$

1- Avec la formule établie précédemment, on trouve

$$l(9, 16, 36) = 9 + 2\sqrt{9 \times 16} + 2\sqrt{16 \times 36} + 36 = 9 + 2 \times 3 \times 4 + 2 \times 4 \times 6 + 36 = 9 + 24 + 48 + 36 = 117$$

$$l(16, 9, 36) = 16 + 2\sqrt{16 \times 9} + 2\sqrt{9 \times 36} + 36 = 16 + 2 \times 4 \times 3 + 2 \times 3 \times 6 + 36 = 16 + 24 + 36 + 36 = 112$$

Comme on pouvait s'y attendre, la longueur dépend de l'ordre dans lequel on place les cylindres (et plus particulièrement de quel cylindre est au milieu).

$$2-b) \quad l(b, a, c) - l(a, b, c) = b + 2\sqrt{ba} + 2\sqrt{ac} + c - (a + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + c)$$

$$l(b, a, c) - l(a, b, c) = b - a + 2\sqrt{ba} - 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} - 2\sqrt{bc} + c - c$$

$$l(b, a, c) - l(a, b, c) = b - a + 2\sqrt{c}(\sqrt{a} - \sqrt{b})$$

$$l(b, a, c) - l(a, b, c) = (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a}) + 2\sqrt{c}(\sqrt{a} - \sqrt{b})$$

$$l(b, a, c) - l(a, b, c) = (\sqrt{a} - \sqrt{b})[-(\sqrt{b} + \sqrt{a}) + 2\sqrt{c}]$$

$$l(b, a, c) - l(a, b, c) = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(2\sqrt{c} - \sqrt{b} - \sqrt{a})$$

3- On utilise l'égalité établie au 2-b) en essayant les positions possibles pour 1, x et y . Le signe des deux facteurs est en général facile à déterminer dans la mesure où la fonction racine carrée est strictement croissante sur l'ensemble des réels positifs.

$$l(y, x, 1) - l(x, y, 1) = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(2\sqrt{1} - \sqrt{y} - \sqrt{x}) = \text{négatif} \times \text{négatif} > 0 \quad \text{donc} \quad l(y, x, 1) > l(x, y, 1)$$

$$l(1, x, y) - l(x, 1, y) = (\sqrt{x} - \sqrt{1})(2\sqrt{y} - \sqrt{1} - \sqrt{x}) = \text{positif} \times \text{positif} > 0 \quad \text{donc} \quad l(1, x, y) > l(x, 1, y)$$

De plus, comme la figure (ou la formule) est symétrique entre a et c , on a $l(1, x, y) = l(y, x, 1)$ et $l(x, 1, y) = l(y, 1, x)$ et $l(1, y, x) = l(x, y, 1)$.

Les deux inégalités établies permettent donc déjà de répondre à la question 3-a) :

La plus grande largeur possible est obtenue en plaçant les cylindres dans l'ordre 1, x , y (ou y , x , 1) : dans l'ordre croissant (ou décroissant) de leurs rayons.

Pour trouver comment on obtient la plus petite largeur, il faut départager les deux autres dispositions :

$$l(1, y, x) - l(y, 1, x) = (\sqrt{y} - \sqrt{1})(2\sqrt{x} - \sqrt{1} - \sqrt{y}) = \text{positif} \times (2\sqrt{x} - \sqrt{1} - \sqrt{y})$$

Le signe (et la disposition la moins large) est donc donné par le signe du second facteur.

Celui-ci peut prendre des valeurs positives ou négatives selon les positions relatives de x et de y .

Pour obtenir la longueur la plus courte, il faut donc distinguer deux cas :

- si $\sqrt{x}$ est plus proche de 1 que de $\sqrt{y}$, alors il faut mettre le grand cylindre (y) au milieu ;
- si $\sqrt{x}$ est plus proche de $\sqrt{y}$ que de 1, alors il faut mettre le petit cylindre (1) au milieu.